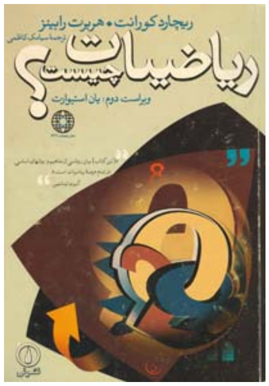
«ریاضیات چیست؟»

کسری علیشاهی



حتماً شما هم این داستان از مثنوی مولوی را شنیده‌اید که گروهی از بازرگانان فیلی از هندوستان به شهری آوردند که مردمش تا آن زمان فیل ندیده بودند. مردم مشتاق با شنیدن این خبر، طاقت صبرکردن تا صبح و روشن شدن هوا را از دست دادند و شبانه برای زیارت جناب فیل هجوم آوردند. نتیجه آنکه به‌دلیل بزرگی فیل و تاریکی، هرکس فقط توانست به بخشی از فیل دست بزند و تصوری از آن به‌دست آورد. آن شب در بازگشت، کسی که گوش فیل را لمس کرده بود، فیل را موجودی پهن و نازک، کسی که دستش به خرطوم فیل رسیده بود، فیل را لوله‌ای دراز، و آن‌کس که به پای فیل دست زده بود، فیل را ستونی قطور و استوار می‌دانست.

وضعیت ما در مقابل دانش عظیمی چون ریاضیات و تلاش برای درک اینکه ریاضیات چیست، نه تنها ساده‌تر از وضع مردم داستان فوق نیست، بلکه دست‌کم به دو دلیل دشوارتر است: اول اینکه با ابداع نظریه‌های جدید، طرح مسائل نو و کشف حقایق و ارتباطات تازه که قبلاً از آنها بی‌خبر بوده‌ایم، ریاضیات دائماً و با سرعتی زیاد در حال گسترش است. از این رو، شاید بیشتر به درخت لوبیای سحرآمیز شبیه باشد تا فیل! تفاوت دوم این است که اینجا ـ برخلاف داستان فیل در تاریک‌خانه ـ نمی‌توان به‌سادگی تا صبح صبرکرد تا نوری بتابد و همه چیز را روشن کند! بنابراین، چاره‌ای جز این نمی‌ماند که آستینها را بالا بزنیم و وارد معرکه شویم. بخوانیم، بشنویم، با مسائل ریاضی دست‌وپنجه نرم کنیم، و از این راهها و با لمس کردن فیل ریاضیات از زوایای مختلف، به‌تدریج درک ریاضی خود را گسترش دهیم. در عین حال باید گوش‌به‌زنگ باشیم، چون گاهی ممکن است فرصتی استثنایی پیش بیاید: فیل‌شناسی متبحر از راه برسد و حاضر شود چند ساعتی ما را با خود به درون قفس فیل ببرد و بگرداند!

کتاب «ریاضیات چیست؟» چنین فرصتی است. ریچارد کورانت ـ یکی از دو نویسندهٔ کتاب ـ ریاضی‌دانی بزرگ بوده است و ریاضیات را نزد استادانی حتی بزرگ‌تر از خود آموخته است. تا پیش از جنگ جهانی دوم، آلمان قطب ریاضی دنیا محسوب می‌شد. سردمدار جامعهٔ ریاضی آلمان، کلاین و پس از او هیلبرت بود. شاید نام هیلبرت را به‌خاطر ۲۳ مسئلهٔ مبارزطلبی که او در ابتدای قرن به‌عنوان مسائل مهم و دشوار پیش روی ریاضیات مطرح کرد، شنیده باشید. بعضی، هیلبرت و پوانکاره را بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان تمامی اعصار می‌دانند. به‌دلیل حضور هیلبرت در دانشگاه گوتینگن، این دانشگاه مرکز تجمع ریاضی‌دانان بزرگی بود که از دل بحثها و جدلهای آنان مکاتب اصلی فلسفهٔ ریاضیات در قرن بیستم متولد شدند.

کورانت شاگرد هیلبرت بود و بخشی از دوران شکوفاییش در ریاضیات را در چنین فضایی سپری کرد. بااین‌حال، کتاب «ریاضیات چیست؟» دست‌کم به‌طور مستقیم، نه دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات، بلکه دربارهٔ خود ریاضی است، به این معنی که نویسندگان کوشیده‌اند با انتخاب بخشهایی از «ریاضیات واقعی» و درگیرکردن خواننده با آن، او را از نزدیک‌ترین راه ممکن به پاسخ این پرسش که ریاضیات چیست، راهنمایی کنند.

کتاب از هشت به علاوهٔ یک فصل تشکیل شده است. عنوانهای این فصلها چنین‌اند: (۱) عددهای طبیعی، (۲) دستگاه اعداد در ریاضیات، (۳) ترسیمهای هندسی، جبر هیئتهای اعداد، (۴) هندسهٔ تصویری، رهیافت اصل موضوعی، هندسهٔ نااقلیدسی، (۵) توپولوژی، (۶) تابع و حد، (۷) ماکسیمم و مینیمم، (۸) حساب دیفرانسیل و انتگرال [حسابان]، (۹) پیشرفتهای جدید.

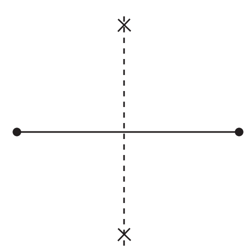
فصل نهم را، سالها بعد از تألیف کتاب، یان استیوارت نوشته است. او در این فصل به مسائلی پرداخته است که در نسخهٔ اولیه به‌عنوان مسائل حل‌نشده مطرح شده بودند و در طول این سالها، یا حل شده‌اند یا پیشرفتهایی مهم در حل آنها رخ داده است.

بیایید در باغی که کورانت و رابینز گیاهانش را با دقت و سلیقهٔ زیاد از دل جنگل ریاضیات برگزیده‌اند، گشتی کوتاه بزنیم.

از رسم با خط‌کش و پرگار تا هندسهٔ تصویری

منظورمان از خط‌کش در این بخش، وسیله‌ای است که با آن می‌توان بین هر دو نقطهٔ دلخواه، خط رسم کرد، اما روی خط‌کش طول مشخص نشده است و نمی‌توان روی آن علامت گذاشت.

به کمک خط‌کش و پرگار، به‌سادگی می‌توان عمودمنصف پاره‌خطی داده‌شده را رسم کرد:

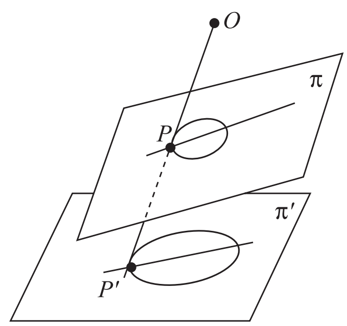


با استفاده از این ترسیم ابتدایی، مسئلهٔ یافتن مرکز دایره‌ای داده‌شده در صفحه به کمک خط‌کش و پرگار، چندان دشوار نخواهد بود (کافی است توجه کنیم که عمود منصف وتری دلخواه از دایره، از مرکز دایره می‌گذرد). اما آیا می‌توان فقط با استفاده از پرگار، و یا فقط با استفاده از خط‌کش این‌کار را کرد؟ پاسخ پرسش اول مثبت و پاسخ دومی منفی است!

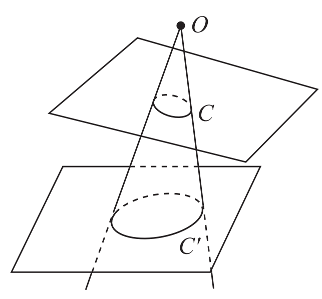
بخش دوم از فصل ۳ کتاب، در باب تبدیل هندسی انعکاس است که ابزاری بسیار نیرومند در حل مسائل

هندسهٔ مسطحه به‌شمار می‌آید. با استفاده از انعکاس می‌توان راه‌حلی برای پرسش اول که در بالا مطرح شد و نیز برای مسئلهٔ مشهور آپولونیوس ــ ترسیم دایره‌ای که بر سه دایرهٔ داده‌شده مماس باشد ــ یافت.

مسئلهٔ دوم (یافتن مرکز دایره فقط با استفاده از خط‌کش)، نمونه‌ای ساده از ناممکنها در ریاضیات است. نمونه‌ای که به‌اندازهٔ تثلیث زاویه و تربیع دایره توجه ریاضی‌دانان حرفه‌ای و آماتور را در طول تاریخ جلب نکرده‌است، اما بررسی آن در نوع خود جالب و آموزنده است. پاسخ در فصل ۴ کتاب و به کمک تبدیلهای تصویری بیان شده‌است. تبدیلهای هندسی تبدیلاتی‌اند که خطوط راست را به خطوط راست می‌برند. نمونهٔ چنین تبدیلی تصویرکردن نقاط صفحه‌ای مفروض مانند π بر صفحه‌ای دیگر مانند π'، از نقطه‌ای مانند O است، به‌این‌صورت که برای یافتن تبدیل نقطهٔ P بر π، O را به P وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا π' را قطع کند.



هندسهٔ تصویری مطالعهٔ آن ویژگیهای هندسی از اشکال است که تحت تبدیلهای تصویری تغییر نمی‌کنند. با این حساب، مفهوم «خط» در هندسهٔ تصویری معنادار است زیرا همان‌طور که گفتیم تصویر هر خط، خط است. آیا مفهوم «دایره» نیز کماکان در این نوع هندسه وجود دارد؟ نه، چنین نیست. زیرا با تصویر کردن، دایره ممکن است بسیار کشیده و یا حتی پاره شود! اگر کمی فکر کنید، متوجه می‌شوید که تصویر دایره در حالت کلی مقطعی مخروطی خواهد شد (و به همین دلیل، هندسهٔ تصویری ابزاری بسیار مناسب برای بررسی مقاطع مخروطی است)، اما اگر تصویر مورد نظر را به‌دقت انتخاب کنیم، می‌توان آن دایره را به دایره‌ای دیگر تبدیل کرد و البته لزومی ندارد که مرکز دایرهٔ دوم تصویر مرکز دایرهٔ اول باشد.



همین‌جا می‌توانیم پاسخ سؤال ترسیمی موردنظرمان را پیدا کنیم: آنچه که با استفاده از خط‌کشِ تنها رسم می‌شود، در حقیقت در دنیای هندسهٔ تصویری رسم‌شدنی است (چون خط‌کش «خط» می‌کشد و خط مفهومی معتبر در هندسهٔ تصویری است)، اما مرکز دایره در هندسهٔ تصویری ممکن است به نقطه‌ای غیر از مرکز تبدیل شود. پس یافتن مرکز دایره با استفاده از خط‌کش تنها امکان ندارد.

دستگاه اعداد، مفهوم بی‌نهایت

معمولاً از شنیدن واژه‌ای مثل «دستاوردهای بشر»، اختراع چرخ و هواپیما و رایانه و ... تداعی می‌شود. دو فصل اول کتاب «ریاضیات چیست؟» به دستاوردی بزرگ و مؤثر در تاریخ تمدن پرداخته است: عدد! شاید کمتر کسی بداند که مفهوم عدد چه سیر تاریخی پرفرازونشیبی را طی و در این مسیر چه اذهان بزرگی را به خود مشغول کرده‌است. جملهٔ معروفی از کرونِکِر، ریاضی‌دان قرن نوزدهم نقل می‌کنند که «اعداد طبیعی را خداوند آفرید، بقیه‌اش کار بشر است.»!

انسان اولیه برای رفع نیاز طبیعی به شمردن، به اعداد طبیعی متوسل شد. اما اعداد طبیعی برای «اندازه‌گیری» کافی نبودند. اعداد گویا یا کسری توسعه‌ای از مفهوم عدد بودند که برای اندازه‌گیری طول، وزن، زمان و ... مناسب به‌نظر می‌آمدند. تا مدتها تصور بر این بود که هر عددی گویاست یا معادلاً هر دو پاره‌خطی متوافق‌اند، یعنی پاره‌خط سومی وجود دارد که طول هریک از دو پاره‌خط اول مضربی صحیح از طول آن است. کشف نامتوافق بودن ضلع و قطر مربع یا به زبان امروزی کشف این حقیقت که $\sqrt{۲}$ گویا نیست انقلابی بزرگ در ریاضیات بود و تصور بشر از مفهوم عدد را به‌کلی واژگون کرد. دستگاه اعداد حقیقی از همین‌جا و با پر کردن شکافهای بین اعداد گویا به‌وجودآمد. اما ماجرا به همین‌جا ختم نشد: درست است که اعداد حقیقی به مفهومی هندسی کامل‌اند و شکافی در آنها وجود ندارد، اما ذهن نیرومند ریاضی‌دانان بزرگی چون گاؤس از این هم فراتر رفت و دستگاه بزرگ‌تری از اعداد پیشنهاد شد که در آن معادلاتی مثل $x^{۲} = -۱$ هم جواب داشته باشند! در حقیقت، اگر وجود جوابی برای این معادله را فرض کنیم و این جواب را i بنامیم و بخواهیم ضرب و جمع اعداد همچنان معنادار باشد، باید همهٔ اعداد به شکل $a + (b \times i)$ را که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند، در دستگاه جدید اعداد خود بپذیریم.

گاؤس و بعضی دیگر کشف کردند که این مجموعهٔ جدید ـ که آن را مجموعهٔ اعداد مختلط می‌نامیم ـ علاوه بر اینکه مانند اعداد حقیقی از نظر هندسی کامل‌اند، از نظر جبری نیز به نوعی کامل‌اند، به این معنی که هر معادلهٔ چندجمله‌ای در آنها جواب دارد!

به اعداد گویا و گنگ برگردیم. $\sqrt{۲}$ گویا نیست، اما می‌توان آن را با استفاده از $\sqrt{\ }$ نمایش داد. آیا اعداد گنگ دیگر را هم می‌توان به‌صورت جمع و تفریق و ضرب و تقسیم رادیکالها (ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم، ...) و اعداد گویا نوشت؟

این هم از پرسشهایی است که ریاضی‌دانان تا مدتها جواب آنها را نمی‌دانستند. در واقع، هیچ‌کس نتوانسته بود اعدادی مثل π را برحسب رادیکالها بنویسد، اما هیچ‌کس هم نتوانسته بود ثابت کند که چنین کاری ممکن نیست. لیوویل نخستین کسی بود که ثابت کرد اعدادی وجود دارند که جبری نیستند، یعنی جواب هیچ معادلهٔ چندجمله‌ای‌ای با ضرایب گویا نیستند. (هر عددی که برحسب رادیکالها نوشته شود جبری است. بنابراین اعدادی وجود دارند که

نمی‌توان آنها را با رادیکالها نوشت.) لیوویل حتی نمونه‌ای از چنین اعدادی را «ساخت»، که به این شکل است:

۰/۱۱۰۰۰۱۰۰ . . . ۰۱۰۰ . . .

که در این عدد، رقم !۱ام، !۲ام و . . .بعد از ممیز یک، و بقیهٔ ارقام صفرند.

بعدها کانتور با ابداع نظریهٔ تأثیرگذار خود دربارهٔ بی‌نهایتها که امکان مقایسهٔ مجموعه‌های نامتناهی مختلف با یکدیگر را فراهم می‌کند، ثابت کرد که مجموعهٔ اعداد جبری در برابر مجموعهٔ اعداد غیرجبری بسیار کوچک است، همان‌طور که اعداد گویا بسیار کمتر از اعداد گنگ‌اند!

ماکسیمم و مینیمم در ریاضیات و فیزیک

حاصلضرب n عدد نامنفی که مجموع آنها برابر مقداری ثابت مانند A است حداکثر چند است؟ اگر ABC مثلثی دلخواه باشد، کدام نقطه است که مجموع فاصله‌هایش از نقاط A، B و C کمترین مقدار ممکن باشد؟ در میان همهٔ شکلهایی که محیطهایشان برابر است، مساحت کدام‌یک بیشترین است؟

این سه مسئله که به‌ترتیب به نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، مسئلهٔ اشتاینر و مسئلهٔ برابری محیطی معروف‌اند، و مسائل شبیه به اینهاکه به بیشترین یاکمترین مقدارکمیتی در شرایط خاص مربوط‌اند، قدمتی بسیار زیاد در ریاضیات دارند. اما با پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌عنوان ابزاری نیرومند برای بررسی توابع چند متغیره، تحولی اساسی در فهم و حل این رده از مسائل رخ داد. نکتهٔ اصلی اینجاست که مشتق تابع در نقطهٔ ماکسیمم و مینیمم برابر صفر است (البته عکس این مطلب گاهی صحیح نیست) و صفر بودن مشتق را غالباً می‌توان به‌صورت ویژگی جبری یا هندسی‌ای نابدیهی برای جواب مسئله ترجمه کرد. این ویژگی در مسئلهٔ نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، برابر بودن همهٔ عددها و در مسئلهٔ اشتاینر، مساویِ 120° بودن $\angle APB$، $\angle BPC$ و $\angle CPA$ است که P همان نقطهٔ موردنظر است. البته این دو مسئله را می‌توان بدون استفاده از مشتق و با راه‌حلهای زیبا و ابتکاری مقدماتی‌تر نیز حل کرد.

مسئلهٔ برابری محیطی از دو مسئلهٔ دیگر اساساً دشوارتر است. تفاوت مهم این است که نمی‌توان شکلهای روی صفحه را با متناهی پارامتر مشخص کرد تا از این راه مسئله به یافتن جایی که تابعی چند متغیره بیشترین مقدارش را می‌گیرد تبدیل شود. نظریهٔ ریاضی مناسب برای حل این‌گونه از مسائلِ بی‌نهایت بُعدی، که امروزه به حساب تغییرات معروف است، به دنبال حساب دیفرانسیل و در پی آثار ریاضی‌دانانی مانند برنولی‌ها، نیوتن، لایب‌نیتس و . . . به‌وجود آمد.

فصل هفتم کتاب شرحی خواندنی از پیشرفت در حل این مسائل به همراه راه‌حلهایی زیبا و جالب از آنها و مسائل دیگری از این نوع است.

مشخصات کتاب

ریچارد کورانت، هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟ ویراست دوم، ترجمهٔ سیامک کاظمی، نشر نی.
چاپ سوم این ترجمه امسال به بازار آمد.